86-8-323
高工研図書室

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P10-86-310

А.А.Пасько*, В.В.Пилюгин*, В.Н.Покровский

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

* Московский инженерно-физический институт

1986

© Объединенный институт ядерных исследований Дубна, 1986.

1. ВВЕДЕНИЕ

При решении ряда научных задач часто оказываются полезными те или иные геометрические интерпретации, причем иногда удается и полностью описать ход решения задачи, оставаясь в рамках введенных геометрических моделей. Программным средством, позволяющим непосредственно реализовать такой подход на ЭВМ, являются так называемые интегрированные системы машинной геометрии и графики /ИСМГГ/ [1]. Эти системы позволяют пользователю вводить в рассмотрение различные геометрические объекты, выполнять преобразования над ними, а также ставить в соответствие таким объектам одно или несколько графических изображений. Таким образом, ИСМГГ представляют собой развитый инструмент геометрического моделирования в научных исследованиях.

Прикладные программные средства на базе ИСМГГ могут эффективно применяться при анализе функциональных зависимостей. Например, реализованные на базе комплекса машинной геометрии и графики САГРАФ [2,3] диалоговые системы PLOT и SURF [4] обеспечивают решение задач графического анализа функций одной и двух переменных. На практике, однако, возникают задачи анализа функций трех и более переменных. В данной работе рассмотрен один из вопросов применения ИСМГГ для геометрического моделирования в задачах анализа функций трех переменных. Представлен метод получения кусочно-аналитического описания тела, заданного функцией трех переменных совместно с областью определения, а также описания поверхности уровня функции трех переменных и графического отображения этой поверхности. Метод реализован на базе комплекса машинной геометрии и графики САГРАФ.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫБОР МОДЕЛИ

Пусть задана непрерывная действительная функция трех переменных $\zeta = f(x, y, z)$ с областью определения $x \in X = [x_1, x_2]$, $y \in Y = [y_1, y_2]$, $z \in Z = [z_1, z_2]$. Рассмотрим следующую задачу анализа этой функции: для любого наперед заданного значения $\zeta = c$ исследовать свойства прообраза

$$f^{-1}(c) = \{x, y, z : x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z,\ f(x, y, z) = c\}. \qquad /1/$$

Эта задача может быть решена с использованием следующих геометрических моделей. Геометрической моделью области определения

функции является параллелепипед B^3 в пространстве xyz. Функция совместно с областью определения геометрически интерпретируется как тело B^4 в пространстве $xyz\zeta$. Геометрической моделью прообраза /1/ является поверхность S, которую обычно называют "поверхностью уровня". Эта поверхность представляет собой проекцию в пространство xyz сечения тела B^4 гиперплоскостью $\zeta = c$.

Для решения сформулированной выше задачи с использованием данных геометрических моделей ИСМГГ должна предоставлять пользователю возможность ввести геометрический объект типа B^4, выполнить операцию сечения объекта гиперплоскостью, спроецировать сечение в пространство xyz, определить различные метрические и топологические характеристики этой проекции, в частности, путем построения одного или нескольких графических изображений этой проекции.

Для реализации перечисленных возможностей в рамках ИСМГГ будем искать описание тела B^4 и поверхности S в кусочно-параметрическом виде. Тело B^4 представим в виде совокупности ячеек:

$$B^4 = \bigcup_n b_n^4 \quad (n = 1,N), \qquad /2/$$

где N - общее количество ячеек. Для описания каждой из ячеек b_n^4 будем использовать параметрический вектор

$$R_n(u, v, w) = [x(u, v, w)\ y(u, v, w)\ z(u, v, w)\ \zeta(u, v, w)], \qquad /3/$$

где $u \in [0,1], v \in [0,1], w \in [0,1]$. Поверхность S представим в виде совокупности отсеков:

$$S = \bigcup_q S_q \ (q = 1, Q), \qquad /4/$$

где Q - общее количество отсеков. Для описания каждого из отсеков S_q будем использовать параметрический вектор

$$P_q\ (u, v) = [x(u, v)\ y(u, v)\ z(u, v)], \qquad /5/$$

где $u \in [0,1], v \in [0,1]$. Выбор такой модели объясняется известными из области вычислительной геометрии преимуществами параметрического описания геометрических объектов /5/.

Введем в пространстве xyz регулярную трехмерную прямоугольную сеть $x_i\, y_j\, z_k$, где $i = 1, i_{max} + 1$; $j = 1, j_{max} + 1$; $k = 1, k_{max} + 1$. При этом параллелепипед B^3 разбивается на множество ячеек $\{b_{ijk}^3\}$. Ячейка b_{ijk}^3 ограничена плоскостями $x = x_i, x_{i+1}$; $y = y_j, y_{j+1}$; $z = z_k, z_{k+1}$ /рис.1/. С учетом такого разбиения B^3 уточним модель /2/ тела B^4:

$$B^4 = \bigcup_{ijk} b_{ijk}^4, \qquad /6/$$

причем ячейка b^3_{ijk} является проекцией b^4_{ijk} в пространство xyz. Уточним также модель /4/ поверхности S:

$$S = \bigcup_{ijk} \left(\bigcup_{m} S^m_{ijk} \right), \qquad /7/$$

где S^m_{ijk} - отсек поверхности, принадлежащий ячейке b^3_{ijk}, а индекс m означает, что данной ячейке в общем случае может принадлежать несколько отсеков.

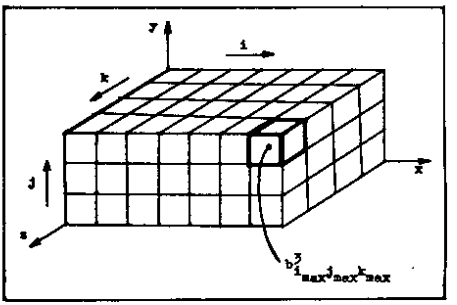


Рис.1. Разбиение параллелепипеда B^3 на ячейки.

3. ПОЛУЧЕНИЕ ОПИСАНИЯ МНОЖЕСТВА ОТСЕКОВ $\{S^m_{ijk}\}$

3.1. Пересечение поверхности уровня с гранями ячейки b^3_{ijk}

Рассмотрим ячейку b^3_{ijk} с заданными значениями функции $f(x,y,z)$ в вершинах 1-8 и единичный куб в пространстве uvw /рис.2/. С использованием процедуры линейной интерполяции представим описание /3/ ячейки b^4_{ijk} в следующем виде:

$$R_{ijk}(u,v,w) = A(u,v) \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \zeta_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \zeta_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & \zeta_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & \zeta_4 \end{bmatrix} (1-w) + A(u,v) \begin{bmatrix} x_5 & y_5 & z_5 & \zeta_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & \zeta_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 & \zeta_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 & \zeta_8 \end{bmatrix} w, \qquad /8/$$

где $A(u,v)=[(1-u)(1-v)\ v(1-u)\ uv\ u(1-v)]$. Отметим, что уравнение /8/ задает отображение единичного куба в пространстве uvw на ячейку b^4_{ijk}.

Для составляющей ζ вектора R_{ijk} из /8/ с учетом условия /1/ получаем

$$A(u,v)\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\\ \zeta_4\end{bmatrix}(1-w)+A(u,v)\begin{bmatrix}\zeta_5\\ \zeta_6\\ \zeta_7\\ \zeta_8\end{bmatrix}w=c$$

или

$$a_0uvw+a_1vw+a_2vw+a_3uv+a_4w+a_5v+a_6u+a_7=0. \qquad /9/$$

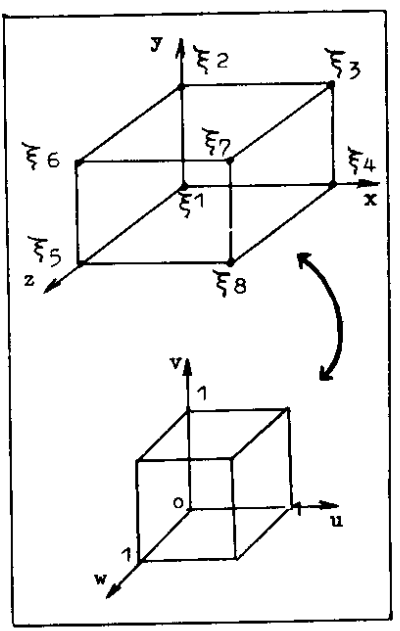
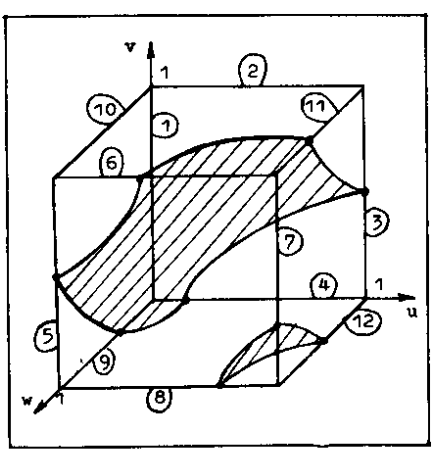


Рис.2. Взаимное соответствие между ячейкой b^4_{ijk} и единичным кубом.

Рис.3. Пример расположения контуров на гранях единичного куба.



Уравнение /9/ задает поверхность в пространстве uvw, часть которой, принадлежащая единичному кубу, является прообразом $\{S^m_{ijk}\}$ при отображении /8/. Линии пересечения этой поверхности с гранями единичного куба являются прообразом линий пересечения поверхности S с гранями ячейки b^3_{ijk}. Видно, что линией пересечения поверхности /9/ с любой из граней единичного куба является дуга гиперболы. Например, для грани w = 1 это дуга гиперболы, заданной уравнением

$$v=\frac{-(a_4+a_7)+(a_2+a_6)u}{(a_1+a_5)+(a_0+a_3)u},$$

с центром $u_0 = -(a_4 + a_5)/(a_0 + a_3)$, $v_0 = -(a_2 + a_6)/(a_0 + a_3)$. Можно показать, что дуги гипербол, расположенные на гранях единичного куба, образуют замкнутые контуры, которые отображаются в границы искомых отсеков $\{S^m_{ijk}\}$. В состав одного контура в общем случае может входить более четырех дуг. Пример возможного расположения контуров на гранях единичного куба приведен на рис.3.

3.2. Алгоритм получения списка вершин S^m_{ijk}

Будем искать вектор /5/, описывающий отсек S^m_{ijk}, в следующем виде:

$$P^m_{ijk}(u,v) = [(1-u)(1-v)\ v(1-u)\ uv\ u(1-v)] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}, \qquad /10/$$

где $(x_\ell\ y_\ell\ z_\ell)_{\ell=1,4}$ - матрица координат точек - вершин отсека, принадлежащих ребрам ячейки b^4_{ijk}. При таком описании S^m_{ijk} является билинейным отсеком. Используем приведенные выше свойства линий пересечения поверхности /9/ с гранями единичного куба для поиска списка вершин отсека и матрицы координат этих вершин. Для этого достаточно найти список вершин прообраза отсека в пространстве uvw, а затем к координатам вершин применить отображение /8/.

Перенумеруем 12 ребер единичного куба, как показано на рис.3. Введем граф связности ребер единичного куба (V,E), где V - множество узлов графа, каждый из которых соответствует ребру куба, E - множество дуг графа. Наличие дуги E_{ij} между узлами V_i и V_j означает, что ребра куба с номерами i и j имеют точки пересечения с поверхностью /9/ и на соответствующей грани куба лежит дуга гиперболы, ограниченная этими точками. Очевидно, что если нет пересечений поверхности /9/ с вершинами куба, то из данного узла графа может исходить не более двух дуг. На рис.4 приведен пример графа, соответствующего контурам на рис.3. Искомым отсекам $\{S^m_{ijk}\}$ соответствуют простые циклы в графе связности. Список вершин прообраза отсека в этом случае может быть получен

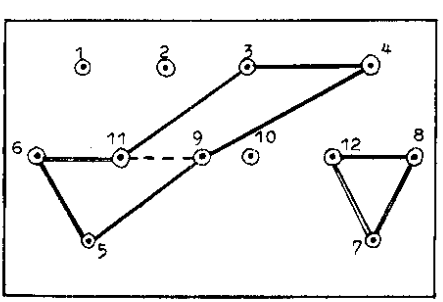


Рис.4. Пример графа связности ребер единичного куба.

на основе списка узлов графа, входящих в цикл. Для получения этих списков необходимо последовательно выполнить процедуры формирования и трассировки графа.

Процедура формирования графа состоит в последовательном независимом просмотре всех шести граней единичного куба в пространстве uvw и простановке дуг между соответствующими узлами графа. При рассмотрении одной грани возможны следующие случаи:

1/ нет точек пересечения ребер куба с поверхностью /9/;

2/ пересечение в вершине куба;

3/ пересечение с двумя ребрами грани;

4/ пересечение с четырьмя ребрами грани.

В случае 2 константа c изменяется условно на малую величину для перехода к другим возможным случаям. В случае 3 вводится дуга между соответствующими узлами графа. Случай 4 возможен, если на грани лежит гипербола вида

$$v = \frac{a + bu}{e + du}$$

и $b/d \in (0,1)$, $-e/d \in (0,1)$, то есть центр гиперболы лежит внутри единичного квадрата /рис.5/. Для правильного выбора пары дуг гиперболы достаточно, например, сравнить абсциссу u_2 точки пересечения гиперболы с ребром 2 /v = 1/ и абсциссу центра гиперболы:

1/ $u_2 \geq -e/d$ - дуги E_{23} и E_{14},

2/ $u_2 < -e/d$ - дуги E_{12} и E_{34}.

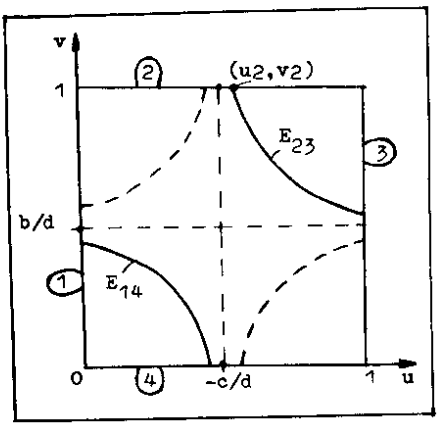


Рис.5. Пример расположения центра гиперболы внутри единичного квадрата.

Процедура трассировки графа предназначена для выявления циклов и состоит из следующих шагов:

1/ поиск узла i, из которого исходит хотя бы одна дуга E_{ij};

2/ переход к узлу j, уничтожение дуги E_{ij};

3/ переход к узлу k в соответствии со второй дугой E_{jk}, исходящей из узла, и уничтожение дуги E_{jk}.

Шаги 2-3 повторяются до замыкания данного цикла, после чего выполняется шаг 1. Процесс завершается при условии $\{E_{ij}\} = 0$. В случае, когда число узлов в данном цикле больше 4, вводятся

фиктивные дуги графа для разбиения на циклы из 4 и 3 узлов /например, дуга $E_{9,11}$ на рис.4/, что соответствует модели /10/.

4. ГРАФИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Пусть для построения изображения некоторой проекции поверхности уровня заданы углы поворота поверхности вокруг осей OX и OY. Поскольку отсеки $\{S^m_{ijk}\}$ принадлежат ячейкам $\{b_{ijk}\}$, составляющим регулярную трехмерную структуру, можно предложить такой способ перебора этих ячеек, что отсеки окажутся отсортированными по удалению от наблюдателя. Например, для проекции параллелепипеда, показанной на рис.1, перебор ячеек должен производиться в следующем порядке: $k = k_{max}, 1 (j = j_{max}, 1 (i = i_{max}, 1))$. Для получения растрового изображения поверхности при таком переборе отсеков можно применить известный алгоритм сортировки по глубине с использованием какого-либо способа закраски /6/.

Для получения векторного изображения предлагается применить следующий алгоритм. На картинной плоскости, в прямоугольнике, охватывающем проекцию поверхности, вводится вспомогательная прямоугольная равномерная сетка размерности $(k_x + 1) \cdot (k_y + 1)$, разбивающая его на $k_x \cdot k_y$ прямоугольных ячеек /рис.6/. Ей ставится в соответствие булева матрица $\{M_{pq}\}$ размерности $k_x \cdot k_y$, для которой: $M_{pq} = 0$ означает, что ячейка с индексом p,q свободна, $M_{pq} = 1$ - ячейка занята. Производится последовательная обработка отсеков, отсортированных по удалению от наблюдателя. Обработка очередного отсека разбивается на два последовательных этапа:

1/ отсечение отрезков - сторон проекции отсека;

2/ растрирование проекции отсека.

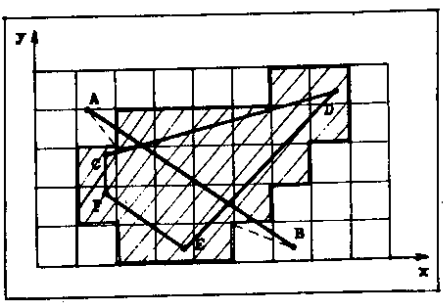


Рис.6. Растрирование проекции отсека и отсечение отрезка.

Отсечение отрезка состоит в просмотре всех ячеек, которые пересекают отрезок, и выделении видимых участков отрезка. Видимые участки отрезка пересекают ячейки с $M_{pq} = 0$. Для экономии времени за вершины видимых отрезков можно принять узлы вспомогательной сети, ближайшие к точкам пересечения отрезка с линиями сети /см. штриховые линии на рис.6/. В ряде случаев может оказаться, что очередной отрезок нет необходимости обрабатывать:

1/ отрезок соответствует фиктивной дуге графа связности;
2/ отрезок принадлежит двум отсекам, причем один из них уже обработан;
3/ отрезок имеет нулевую длину /например, одна из сторон отсека, вырожденного в треугольник/.

Растрирование проекции отрезка состоит в присвоении $M_{pq} = 1$ для всех ячеек, пересекающихся с этой проекцией /заштрихованные ячейки на рис.6 для проекции отсека CDEF/.

Применение этого алгоритма может привести к появлению некоторых дефектов в изображении, связанных с тем, что отсеки поверхности, принадлежащие одной ячейке b^3_{ijk}, не сортируются по глубине. Размеры дефектов уменьшаются с увеличением размерности сетки при разбиении области определения функции на ячейки. Отметим, что для предложенного алгоритма построения векторного изображения характерны черты, присущие растровым методам удаления невидимых поверхностей. На эффективность такого подхода было указано в работе /7/.

5. ВОЗМОЖНЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

Описанные выше алгоритмы позволяют строить геометрические модели и графические изображения следующих поверхностей.

1. Поверхности уровня функции трех переменных $\zeta = f(x, y, z)$. Рассмотрим пример из специальной теории относительности. Пусть событие A произошло в начале координат диаграммы пространства-времени. Для координаты z события B, для которого интервал между A и B равен нулю, можно записать: $|z| = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$. На рис.7 приведены световые конусы в пространстве txy для событий с $z = 0$ и $z > 0$, которые представляют собой поверхности уровня приведенной выше функции $z(t, x, y)$.

2. Поверхности равной плотности реальных трехмерных тел. Является частным случаем по отношению к случаю 1, однако может быть выделен ввиду большой практической значимости. Значения плотности могут быть заданы в виде матриц, соответствующих сечениям тела параллельными плоскостями, например, с использованием методов компьютерной томографии. На рис.8 приведено изображение объекта, заданного трехмерной матрицей плотности.

3. Поверхности, заданные неявной функцией двух переменных $f(x, y, z) = 0$. На рис.9 приведено изображение такой поверхности и ее сечения при $z = 0$. Поверхность задана уравнением

$$\sum_{i=1}^{3} f(x, y, z, a_i, b_i, c_i) = 0,$$

$$f(x,y,z,a,b,c) = \begin{cases} \sin(2\pi d), & d = 1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 - (\frac{z}{c})^2 \geq 0, \\ 0 & d < 0. \end{cases}$$

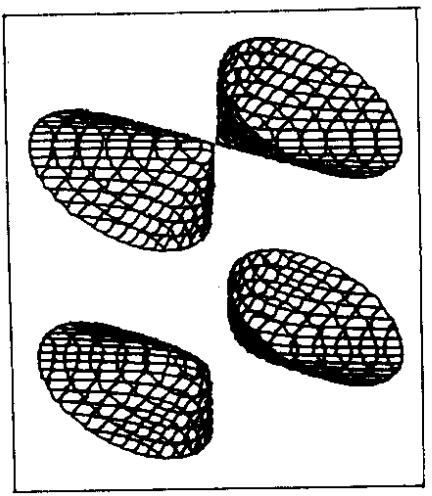


Рис.7. Поверхности уровня функции $z = f(t, x, y)$.

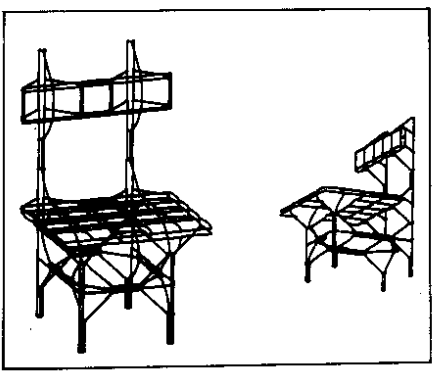


Рис.8. Поверхность равной плотности реального объекта.

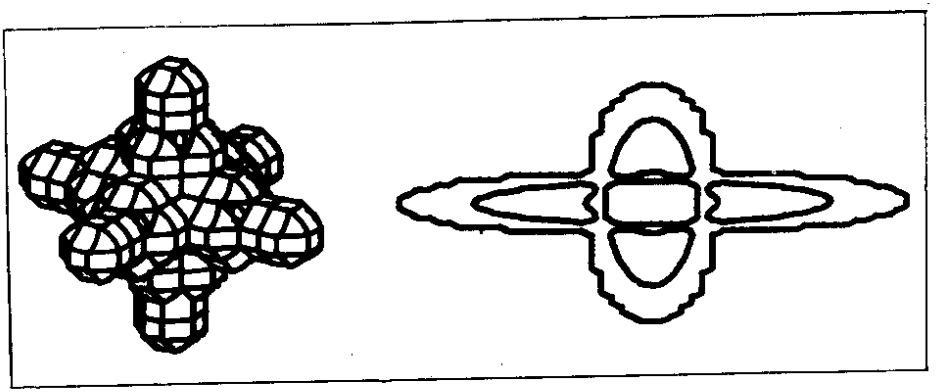


Рис.9. Поверхность, заданная функцией $f(x, y, z) = 0$ и сечение $z = 0$.

Необходимо отметить, что в отличие от работ /8,9/ предложенные методы позволяют не только получать графические изображения поверхностей, но и строить их геометрические модели на ЭВМ

с целью их дальнейшего преобразования и анализа средствами ИСМГГ. В настоящее время описанные алгоритмы реализованы на ЭВМ СМ-4 с операционной системой ОС РВ (RSX11-M) на базе комплекса машинной геометрии и графики САГРАФ. Среднее время работы программ для получения рис.7-9 составило 5 минут.

Данное программное обеспечение предполагается использовать, в частности, при планировании эксперимента по определению массы нейтрино из бета-распада трития, а также при обработке многомерных спектров.

В заключение авторы выражают благодарность И.А.Простакову за полезные обсуждения проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилюгин В.В., Сумароков Л.Н., Фролов К.В. Вестник АН СССР, 1985, № 10, с.50.
2. Колобашкин В.М. и др. В сб.: Проблемы информационных систем. МЦНТИ, М., 1983, № 3, с.3.
3. Аджиев В.Д. и др. ОИЯИ, Р10-85-116, Дубна, 1985.
4. Бруданин В.Б., Пасько А.А., Пилюгин В.В. ОИЯИ, Р10-85-117, Дубна, 1985.
5. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. "Мир", М., 1982.
6. Фоли Дж., Вэн Дэм А. Основы интерактивной машинной графики. "Мир", М., 1985.
7. Боровина Т.А., Кислюк О.С. Препринт ИАПУ ДВНЦ АН СССР, № 11 /140/, Владивосток, 1985.
8. Wright T. Computer Graphics, 1979, vol.13, No.2, p.182.
9. Pattnaik P.C., Dichinson P.H., Fry J.L. Comp.Phys.Comm., 1982, vol.25, p.63.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 мая 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна,1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Пасько А.А., Пилюгин В.В., Покровский В.Н. Р10-86-310
Геометрическое моделирование
в задаче анализа функций трех переменных

Рассмотрены вопросы применения машинной геометрии и графики при анализе функций трех переменных. Представлен метод получения кусочно-аналитического описания тела, заданного функцией трех переменных, и поверхности уровня данной функции. Приведены алгоритмы графического отображения с удалением невидимых линий и поверхностей. Алгоритмы реализованы на ЭВМ СМ-4 на базе комплекса САГРАФ.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Pasko A.A., Pilyugin V.V., Pokrovskij V.N. P10-86-310
Using of Computer Geometry
for Analysis of Functions of Three Variables

Using of the computer geometry and graphics for analysis of functions of three variables is discussed. The method is obtained for carrying out the piecewise analytical description of the body defined by the function of three variables and an isosurface of such a function. Algorithms are described for graphic presentation with hidden lines and surfaces removal. Algorithms are realized at the SM-4 computer using SAGRAF program complex.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR..

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986

14 коп.

Редактор Е.К.Аксенова. Макет Н.А.Киселевой.
Набор В.С.Румянцевой, О.В.Шестаковой.

Подписано в печать 23.05.86.
Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,94.
Тираж 410. Заказ 37732.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.